Introdurre la nozione di funzione con l'algebra dei segmenti di Cartesio

Introducing the notion of function through Descartes' algebra of segments

Introducir la noción de función a través del álgebra de segmentos de Descartes

Nicol Imperi ed Enrico Rogora
Dipartimento di matematica, Università degli studi di Roma La Sapienza, Italia

Sunto. *Prima della creazione del calcolo differenziale, una tappa fondamentale nella trattazione matematica delle quantità variabili è la Géométrie di Cartesio (1637), in cui viene introdotta l'algebra dei segmenti. Si tratta di un'algebra con i simboli ma senza i numeri in cui la covariazione tra variabili geometriche, vincolate da costruzioni con riga e compasso o con altre costruzioni geometriche, si può esprimere con equazioni simboliche. Le manipolazioni algebriche permettono di dedurre facilmente le proprietà delle corrispondenti costruzioni geometriche, tra cui quelle che producono i grafici delle funzioni razionali. Crediamo che lo studio delle funzioni con l'algebra di Cartesio possa essere didatticamente efficace nell'insegnamento e apprendimento del concetto di funzione nella scuola secondaria di secondo grado perché, in primo luogo, evita il riferimento ai numeri reali e inoltre, interpretando le formule come costruzioni geometriche e viceversa, facilita il passaggio dalle funzioni intese come processi alle funzioni intese come oggetti.*

Parole chiave: didattica della matematica, storia della matematica, algebra dei segmenti.

Abstract. *In his Géométrie (1637) Descartes introduces the algebra of segments. That's a fundamental step in the mathematical treatment of variable quantities before the creation of the differential calculus. It is an algebra with symbols but without numbers, in which the covariation between geometric variables, constrained by ruler and compass constructions or with other geometric constructions, can be expressed with symbolic equations. By using algebraic manipulations, it is possible to easily deduce the properties of the corresponding geometric constructions, including those that produce graphs of rational functions. We believe that the study of functions through Descartes's algebra can be didactically effective in teaching and learning the concept of function in secondary school. Firstly, it avoids the reference to real numbers; secondly, the interpretation of formulas as geometric constructions and vice versa facilitates the "transition" from functions understood as processes to functions understood as objects.*

Keywords: mathematics education, history of mathematics, segment algebra.

Resumen. *Antes de la creación del cálculo diferencial, un paso fundamental en el tratamiento matemático de las cantidades variables es la Géométrie de Descartes (1637), en la que se introduce el álgebra de segmentos. Es un álgebra con símbolos pero sin números en la que la covariación entre variables geométricas, condicionada por construcciones con regla y compás o con otras construcciones geométricas, puede expresarse con ecuaciones simbólicas. Las manipulaciones algebraicas permiten deducir fácilmente las propiedades de las construcciones geométricas correspondientes, incluidas las que producen las gráficas de funciones racionales. Pensamos que el estudio de funciones con el álgebra de Descartes puede ser didácticamente efectivo en la enseñanza y aprendizaje del concepto de función en la escuela secundaria superior porque, en primer lugar, evita la referencia a números reales; en segundo lugar, la interpretación de fórmulas como construcciones geométricas y viceversa facilita la transición de funciones concebidas como procesos a funciones concebidas como objetos.*

Palabras claves: didáctica de la matemática, historia de la matemática, álgebra de segmentos.

1. Introduzione

Nell'osservazione scientifica di un fenomeno è spesso necessario mettere in relazione due quantità variabili. Nell'antica filosofia naturale le uniche quantità variabili a essere descritte matematicamente sono quelle che variano in maniera uniforme, come ad esempio la posizione degli astri, mentre quantità variabili più generali venivano descritte in maniera esclusivamente qualitativa. Modelli matematici in grado di descrivere tipi di variazioni diverse da quelle uniformi cominciarono a essere elaborati a partire dal medioevo nelle scuole di Oxford e Parigi.[1] Gli strumenti usati furono inizialmente puramente geometrici. Prima della creazione del calcolo differenziale, il modello matematico più raffinato per trattare le quantità variabili fu elaborato da Cartesio nella Géométrie. Il successo del calcolo differenziale, sviluppato pochi anni dopo da Leibniz e Newton, assorbì rapidamente il punto di vista cartesiano mettendo in ombra alcune caratteristiche che, anche da un punto di vista didattico, meritano di essere messe in evidenza. La Géométrie di Cartesio elabora l'approccio di Apollonio allo studio delle coniche raggiungendo nuovi e notevoli risultati, grazie anche al simbolismo algebrico che comincia ad affermarsi con Viète. L'opera di Apollonio, l'ultima delle grandi opere matematiche ellenistiche a essere recuperata e compresa in occidente, contiene i germi di molti sviluppi che portarono a un sostanziale avanzamento delle conoscenze matematiche del XVII, XVIII e XIX secolo. In essa si affronta, tra

[1] Per un'esposizione dettagliata dell'evoluzione storica del concetto di funzione, dall'antichità a Eulero, si rimanda a Youschkevitch (1972).

l'altro, lo studio del sintomo di una conica, cioè dell'equazione (senza simboli) nell'algebra geometrica (senza numeri) di Apollonio.[2]

Il sintomo esprime un particolare tipo di covariazione di due segmenti, vincolati attraverso una costruzione geometrica. Il vincolo, cioè la costruzione geometrica espressa nell'algebra geometrica di Apollonio, diventa così un oggetto matematico, il sintomo. Due curve vengono identificate se hanno lo stesso sintomo e quindi la curva si identifica con il sintomo. Seguendo questa idea Apollonio è in grado di identificare le sezioni coniche con particolari luoghi piani che hanno lo stesso sintomo. I diversi sintomi a cui Apollonio riduce le diverse sezioni coniche vengono descritti con riferimento alle diverse applicazioni delle aree considerate dalla scuola pitagorica, che si distinguono in paraboliche, iperboliche ed ellittiche. È dalla relazione con queste costruzioni che Apollonio sceglie i nomi ancora oggi in uso.

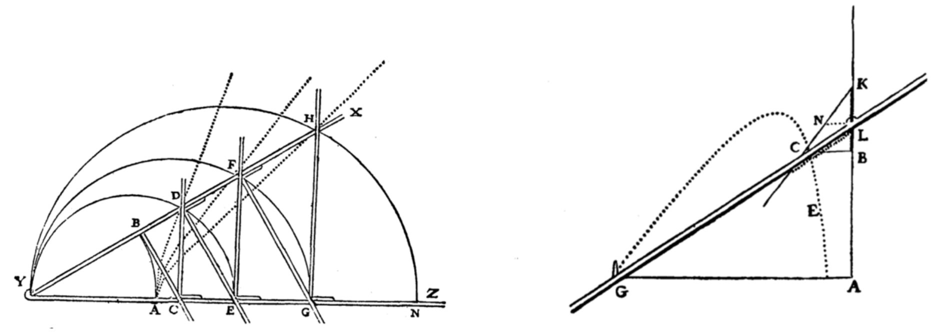
Noi identifichiamo il sintomo con un'equazione nell'algebra dei polinomi costruita su un'algebra di numeri. Apollonio non usa i numeri, né le variabili né le equazioni per descrivere il sintomo di una curva. Cartesio lo fa in un'algebra dei segmenti che è a metà strada tra quella geometrica di Apollonio e quella che utilizziamo oggi. Nell'algebra dei segmenti le operazioni corrispondono a costruzioni geometriche più generali delle applicazioni delle aree considerate da Apollonio e possono esprimersi con il formalismo simbolico di Viète. Il sintomo di una curva diventa, con Cartesio, un'equazione simbolica nell'algebra dei segmenti.

L'algebra di Cartesio permette di esprimere il sintomo di quelle curve che, introducendo coordinate numeriche, si possono riguardare come grafici di funzioni razionali di x e della radice quadrata di x; questi grafici sono luoghi geometrici su cui è possibile costruire con riga e compasso un numero finito qualsiasi di punti. Introducendo ulteriori strumenti (il compasso e il meccanismo di Cartesio) (Figura 1) è possibile costruire punti sulle curve che si possono riguardare come grafici di funzioni algebriche più generali, che non tratteremo in questo lavoro dedicato all'insegnamento secondario.

---

[2] Il sintomo della parabola è così descritto da Apollonio:
Se un cono è tagliato da un piano che passa per il suo asse, e anche da un altro piano che taglia la base del cono lungo una linea retta perpendicolare alla base del triangolo assiale, e se inoltre il diametro della sezione è parallelo a uno dei lati laterali del triangolo assiale, e se una qualsiasi linea retta è tracciata dalla sezione del cono al suo diametro in modo tale che questa linea retta sia parallela alla sezione comune del piano secante con la base del cono, allora il quadrato di questa linea retta abbassata sul diametro sarà uguale al rettangolo determinato dal segmento condotto dal vertice della sezione al punto dove il segmento abbassato sul diametro lo interseca e da un altro segmento che sta al segmento tra l'angolo del cono e il vertice della sezione come il quadrato sulla basse del triangolo assiale sta al rettangolo determinato dai rimanenti lati del triangolo. Chiamo parabola una tale sezione. (Heiberg, 1891, pp. 36–38, traduzione a cura degli Autori).
Usando la notazione algebrica e un sistema di riferimento opportuno, questo sintomo si riduce semplicemente all'equazione $ay = x$.

Figura 1
Queste sono le figure con cui Cartesio nella Géométrie illustra gli strumenti per estrarre le radici qualsiasi di un segmento (compasso di Cartesio a sinistra, Descartes, 1637, p. 318) e per dividere un angolo in un numero qualsiasi di parti congruenti (meccanismo di Cartesio a destra, Descartes, 1637, p. 320)



Gli aspetti caratteristici dell'approccio cartesiano alla costruzione e alla definizione di curva che ci interessa mettere in evidenza sono i seguenti:

- la modellizzazione della variabilità geometrica elementare con il segmento variabile (invece del numero variabile), che permette un modello sufficientemente ricco e intuitivo che evita il riferimento ai numeri;
- la modellizzazione del processo di costruzione di particolari relazioni tra quantità (geometriche) variabili attraverso costruzioni con riga e compasso;
- l'algebrizzazione delle relazioni, che si accompagna all'uso dei simboli e del calcolo simbolico.

Si tratta di processi cruciali nella costruzione del concetto di funzione a partire dai processi di calcolo con la mediazione del simbolismo algebrico, che vengono però percorsi in un contesto diverso da quello ormai abituale delle variabili numeriche e dell'algebra dei numeri, ed ha quindi una base più intuitiva e costruttiva. Ci sembra per questo un contesto didatticamente più semplice e propedeutico, di cui intendiamo esplorare le potenzialità.

Questo lavoro si colloca in un filone di nicchia della ricerca in didattica della matematica, che riguarda l'utilizzo di materiali originali nell'insegnamento. Non presenta analisi di sperimentazioni in classe ma, nel paragrafo conclusivo, si fa cenno all'uso che ne abbiamo fatto nella formazione degli insegnanti in servizio e dei futuri insegnanti.

I due punti principali da considerare per collegare la nostra alle numerose ricerche sull'insegnamento e apprendimento del concetto di funzione che si sono sviluppate negli ultimi anni (Niss, 2020) sono i seguenti:

- la possibilità di utilizzare un approccio basato sulla considerazione di figure geometriche variabili per superare le difficoltà iniziali collegate all'uso dei numeri per modellizzare la nozione di variazione;
- la possibilità di utilizzare l'approccio algebrico ma non numerico suggerito da Cartesio per modellizzare rigorosamente e quantitativamente la co-variazione di figure variabili.

Il primo punto è stato ampiamente considerato nella ricerca in didattica, (si veda per esempio: Carlson & Oerthman, 2005; Falcade, Laborde, & Mariotti, 2007; Antonini, Baccaglini-Frank, & Lisarelli, 2020) dove viene riconosciuto il ruolo importante che può svolgere un software di geometria dinamica a riguardo, come nella citazione seguente:

> L'uso dello strumento di trascinamento permette dunque da un lato di visualizzare i due movimenti e la relazione tra i due movimenti, cioè la relazione tra le variazioni (la covariazione), dall'altro di sperimentare "fisicamente", tramite l'uso manuale del mouse (o di un dito nel caso di strumenti touchscreen), la dipendenza di un punto da quello del punto trascinato. (Colacicco, Lisarelli, & Antonini, 2017, p. 13)

Il carattere principale dell'applicazione di software di geometria dinamica all'apprendimento/insegnamento del concetto di funzione in questi lavori è riassunto nei termini *visualizzare* e *sperimentare.* L'impiego è quindi mirato a sviluppare buone immagini intuitive dell'idea di covariazione. Noi proponiamo una cosa diversa e complementare: quella di *costruire* diverse tipologie di covariazione, evitando l'impiego di funzioni numeriche, come è il caso in tutta la letteratura consultata (si veda, per esempio: Colacicco et al., 2017, p. 13) ma attraverso l'impiego di strumenti geometrici e di formule algebriche. Nel nostro approccio le formule non rimandano a procedure di calcolo ma a costruzioni geometriche; questo permette di evitare, all'inizio del percorso di apprendimento, la necessità di esprimere con i numeri la continuità di una covariazione e quindi di rinunciare a un approccio rigoroso che richiederebbe la difficile costruzione dei numeri reali e l'introduzione del concetto di limite. Su questo punto non siamo a conoscenza di letteratura specifica e quindi in ciò si possono ravvisare i maggiori elementi di originalità del nostro lavoro.

Concludiamo questa introduzione con una riflessione sull'uso del software. Riteniamo particolarmente efficace l'uso di software di geometria dinamica nella progettazione di materiali didattici che seguano l'evoluzione storica dei concetti matematici perché un software di geometria dinamica consente un accesso all'officina mentale dell'autore di un testo antico che permette di guardare ai problemi attraverso i suoi occhi (Brigaglia, Raspanti, & Rogora, 2021). Esso facilita la ricostruzione dei processi geometrici costruttivi (Blåsjö, 2021) che, pur giocando un ruolo secondario nella matematica contemporanea, hanno permesso e permettono di arricchire le immagini dei concetti matematici attraverso l'acquisizione di un'intuizione geometrica di grande valore comunicativo su cui è bene far leva nei processi di apprendimento e insegnamento.

2. Le potenzialità didattiche dell'approccio cartesiano alla covariazione

Nelle scuole secondarie di secondo grado si introduce la definizione di funzione reale di variabile reale come caso particolare della definizione insiemistica generale di funzione. La ricerca didattica ha riconosciuto le difficoltà relative all'apprendimento del concetto di funzione come esemplari di alcuni degli aspetti più critici nel processo di apprendimento e insegnamento della matematica (Dubinsky & Harel, 1992; Sfard, 1992; Sierpinska, 1992; Tall & Vinner, 1981; Vinner, 1983).

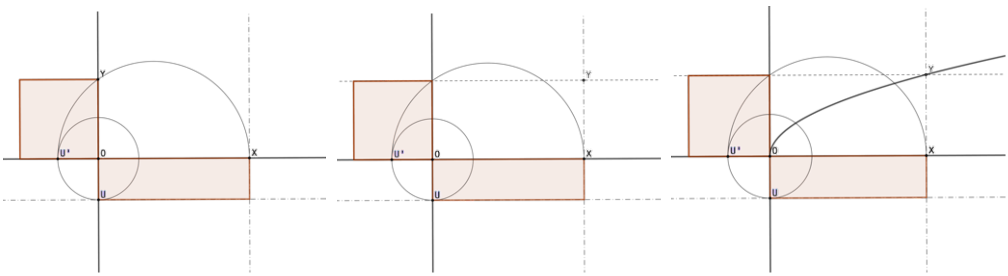
La definizione di funzione reale di variabile reale presuppone la conoscenza dell'insieme dei numeri reali, la cui trattazione è complessa, non viene normalmente svolta in maniera rigorosa nelle scuole secondarie e viene raramente recepita dagli studenti. Ad essi viene chiesto di operare su oggetti di cui hanno normalmente una comprensione parziale, impiegando algoritmi di calcolo non ben padroneggiati nella loro generalità e accettati per "atto di fede" (si pensi al calcolo della radice quadrata di un numero). Lo scarso contenuto operativo del calcolo numerico emerge in tutta la sua gravità nel momento in cui viene chiesto di operare sulle funzioni stesse o di immaginare funzioni meno standard e ciò si verifica anche negli studenti universitari, in cui si presuppone una maggiore conoscenza, almeno operativa, dei numeri; condividiamo quindi l'opinione di chi crede che la definizione insiemistica di funzione e lo studio delle funzioni reali di variabile reale dovrebbe apparire non come il punto di partenza, ma come il risultato di un processo didattico mirato a costruire buone immagini mentali del concetto anche attraverso la ricostruzione della sua evoluzione storica.

Per mettere in luce le ragioni per cui l'approccio algebrico di Cartesio alla costruzione dei luoghi di punti prodotti da costruzioni geometriche fornisce una comprensione più immediata,[3] consideriamo la costruzione del segmento $\sqrt{x}$ a partire dal segmento x (Figura 2). La costruzione, dal punto di vista geometrico, è quella di un segmento tale che il quadrato costruito su di esso è uguale al rettangolo costruito sul segmento di partenza x e su un segmento fissato, che possiamo pensare come unitario.

[3] Cioè non mediata da conoscenze matematiche sofisticate.

Figura 2

Le tre immagini rappresentano le tre fasi per rappresentare una covariazione geometrica: la costruzione del segmento covariante in direzione ortogonale; il suo trascinamento sopra a quello variabile; la visualizzazione della traccia. Dato il rettangolo OUX, per costruire il quadrato equivalente basta prendere come lato il medio proporzionale OY tra i lati OU e OX del rettangolo (figura a sinistra). Sia XY il segmento parallelo e congruente a OY (figura al centro). Abbiamo usato lo stesso simbolo Y per comunicare l'idea che stiamo trascinando il punto variabile su una retta in movimento. Al variare di X il luogo dei punti Y descrive una curva–luogo che ci permette di visualizzare la covariazione geometrica della costruzione indicata. Nell'algebra di Cartesio la covariazione è descritta dall'equazione $y = \sqrt{x}$ dove abbiamo indicato con x e y i segmenti variabili OX e OY rispettivamente. In questo approccio la radice non rappresenta un'operazione numerica ma una costruzione geometrica



La costruzione del segmento radice OY è la stessa per tutti i segmenti OX, e la variazione di OX avviene con continuità, immaginando di trascinare il punto X sulla retta OX, come materialmente si può fare con un software di geometria dinamica come GeoGebra (Hoenwarter, 2002).

Per realizzare la stessa operazione con i numeri, trasformando la variabile numerica x in $y = \sqrt{x}$, la continuità dell'operazione è molto meno concreta, dovendo passare attraverso calcoli di natura assai diversa, per esempio $\sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\pi}$, ecc. Immaginare una continuità dietro queste operazioni richiede uno sforzo di astrazione più difficile, che oscura l'immediatezza della variazione e covariazione geometrica (della x e della y rispettivamente). La covariazione si realizza attraverso una costruzione geometrica che presenta la stessa difficoltà per tutti i segmenti e che, come ci insegna Cartesio, è esprimibile con un'equazione nell'algebra dei segmenti.

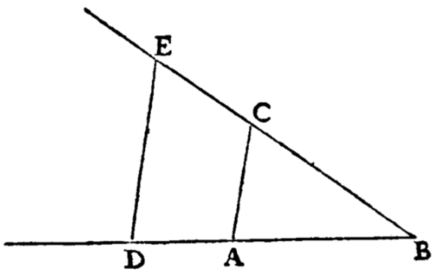
3. L'algebra dei segmenti

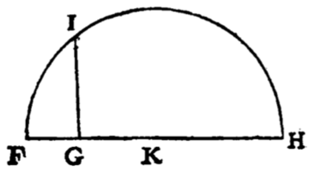
Cartesio nella sua Géométrie comincia col mostrare come, con riga e compasso, siano costruibili a partire da due segmenti qualsiasi la somma, la differenza, il prodotto, la divisione e la radice quadrata. È il primo a comprendere l'utilità di pensare al prodotto e al quoziente tra due segmenti come a un segmento. Negli elementi di Euclide il prodotto tra due segmenti è un rettangolo, mentre il quoziente è un rapporto, nel senso specificato da Eudosso ed esposto nel Libro V. La semplice idea di basare le costruzioni su un segmento fissato (il segmento unità) permette di definire un'algebra geometrica molto più efficace di quella utilizzata dai Greci, usando la quale è possibile descrivere matematicamente meccanismi di covariazione complicati senza dover utilizzare i numeri.

Leggiamo le parole che usa Cartesio (1637) per introdurre le operazioni fondamentali dell'algebra dei segmenti nel libro primo della Géométrie, dove indica come costruire con riga e compasso prodotto, divisione ed estrazione di radice.

> Tutti i problemi della Geometria si possono facilmente ridurre a termini tali che poi, per costruirli, non bisogna conoscere altro che la lunghezza di alcuni segmenti. E come tutta l'aritmetica non si compone che di quattro o cinque operazioni che sono l'Addizione, la Sottrazione, la Moltiplicazione, la Divisione e l'Estrazione di radice (che può essere vista come una sorta di Divisione),così anche in geometria per trovare dei segmenti è solo necessario sommare o sottrarre altri segmenti; e anche, tracciando un segmento, che chiamerò unità in modo da collegarlo il più possibile ai numeri, e che in generale può essere scelto arbitrariamente, e avendo tracciato altri due segmenti, è possibile trovarne un quarto che sta a uno di questi due come l'unità sta all'altro (il che è la stessa cosa della moltiplicazione); o, ancora, trovarne un quarto che sta a uno dei due come l'unità sta all'altro (che è la stessa cosa della divisione); o infine, trovare uno, due, o più medi proporzionali tra l'unità e altri segmenti (che equivale a estrarre la radice quadrata, cubica, ecc. del segmento dato). E io non esiterò a introdurre questi termini aritmetici nella geometria, al fine di rendere maggior chiarezza.
>
> La Moltiplicazione [Figura 3 a sinistra]. Sia ad esempio AB l'unità, e poniamo di dover moltiplicare BD per BC; non devo fare altro che unire i punti A e C, e poi tracciare DE parallela a CA, e BE è il prodotto di questa Moltiplicazione.
>
> La Divisione [Figura 3 a sinistra]. Oppure se si deve dividere BE per BD, avendo unito i punti B ed E, traccio AC parallela a DE, e BC è il risultato di questa divisione.
>
> L'estrazione della radice quadrata [Figura 3 a destra.]. O ancora, se si deve tracciare la radice quadrata di GH aggiungo ad esso sulla stessa retta FG, che è l'unità, e dividendo FH in due parti uguali nel punto K, da esso traccio la circonferenza FIH; dopodiché alzando una linea retta fino a I ad angolo retto rispetto a FH, GI è la radice cercata. Non dirò nulla qui della radice cubica, né delle altre, poiché ne parlerò adeguatamente dopo. (Descartes, 1632, pp. 297–298, traduzione a cura degli Autori).

Figura 3
Fissato un segmento unità il teorema di Talete permette di interpretare prodotto e rapporto di due segmenti come un segmento (figura a sinistra, Descartes, 1637, p. 298). Il medio proporzionale tra un segmento e l'unità rappresenta la radice del segmento (figura a destra, Descartes, 1637, p. 298)





Combinando le costruzioni ora viste, a partire da un segmento x si può costruire con riga e compasso un segmento y la cui dipendenza da x si esprime nell'algebra dei segmenti attraverso un'espressione razionale $y = f(x)$ (di x o della radice di x). Possiamo trasportare y in modo da far coincidere un estremo con l'estremo variabile di x, perpendicolarmente a x. L'altro estremo traccia un luogo che si può visualizzare in maniera molto efficace con GeoGebra: il grafico della funzione f. La costruzione con riga e compasso lega in maniera a nostro avviso più naturale il grafico all'espressione di quanto non lo facciano le operazioni aritmetiche sui numeri (si veda la discussione sulla radice quadrata che abbiamo fatto in fondo al paragrafo 2).

Utilizzando l'algebra dei segmenti, Cartesio spiega come una costruzione geometrica corrisponda alla soluzione di un sistema di equazioni polinomiali. Se il sistema non è determinato e si riconduce a una sola equazione in due incognite si ottiene il luogo al variare del segmento. Il nostro intento è quello di mostrare come sia possibile attraverso una serie di costruzioni geometriche elementari che si possono codificare in un'espressione algebrica specificare il collegamento tra due segmenti variabili. Crediamo che, dal punto di vista dello studente, utilizzare i segmenti invece dei numeri e le costruzioni riga e compasso invece delle operazioni numeriche permetta di dare un senso più concreto alla variazione e alla covariazione continua di oggetti matematici, preparando la strada a una comprensione migliore del concetto di funzione reale di variabile reale e di funzione generale.

La Géométrie è una delle opere fondamentali della Matematica (Serfati, 2005). Per un'esposizione introduttiva dei contenuti, in cui sono presentate molte delle considerazioni su cui si fonda questa proposta, suggeriamo Rogora (2016). Un'analisi approfondita del testo e del contesto in cui si colloca la

Géométrie, con un'ampia bibliografica, si trova in Bos (2001). Essendo la prima opera matematica che un matematico contemporaneo può leggere e capire senza una preparazione specifica, consigliamo caldamente la lettura dell'originale, facilmente reperibile in rete.[4]

Per evitare fraintendimenti, ci preme sottolineare che tra gli scopi della Géométrie non è contemplato quello di sviluppare, neanche a livello embrionale, il concetto di funzione nel senso moderno. Lo scopo del lavoro di Cartesio è quello di applicare alla soluzione dei problemi geometrici il suo metodo generale per ben ragionare (esposto nel *Metodo,* di cui la *Géométrie* è un'appendice). Resta comunque il fatto che gli strumenti introdotti da Cartesio per dar sostanza al suo programma offrono, secondo noi, anche la possibilità di trasformare rigorosamente ma in modo più intuitivo il concetto di covariazione continua di quantità variabili in un oggetto matematico, senza usare la teoria degli insiemi, i numeri reali, la nozione di funzione e la nozione di limite.

4. Una proposta di percorso didattico

Sulla base delle riflessioni fatte in precedenza, proponiamo un percorso didattico da svolgere in una classe di scuola secondaria di secondo grado. In questo lavoro suggeriamo le tappe principali del percorso senza entrare nei dettagli di implementazione che saranno trattati esaustivamente in altra sede. La proposta ha carattere laboratoriale e sfrutta il software di geometria dinamica GeoGebra (Hoenwarter, 2002).

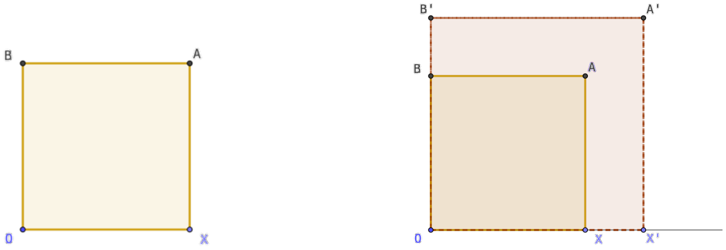
4.1. Il grafico della funzione quadrato $y = x^2$

Consideriamo un segmento OX variabile e su di esso costruiamo un quadrato, come indicato in Euclide I.46 (Figura 4). Variando il punto $X,$ il quadrato prodotto dalla costruzione si adatta con continuità alla variazione del segmento, come si sperimenta facilmente con un software di geometria dinamica.

[4] Per una traduzione italiana si può consultare l'edizione delle opere di Cartesio a cura di Giulia Belgioioso, pubblicata nel 2009 da Bompiani.

Figura 4

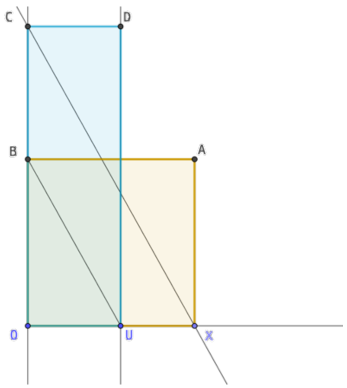
Nella figura a sinistra, la costruzione di un quadrato. Nella figura a destra, il quadrato più grande è ottenuto trascinando la costruzione con l'estremo variabile X del segmento OX



Nel quadrato variabile, variano contemporaneamente tutti e quattro i lati. Pensiamo di fissare sulla semiretta OX un punto fisso U e costruiamo su OU il rettangolo equivalente al quadrato di lato OX. A tal fine, tracciamo da X la parallela a BU (Figura 5), che interseca la retta OB in C. Il teorema di Talete ci dice che $OX: OU = OC: OB$ ovvero il rettangolo cercato è quello di lati OU e OC.

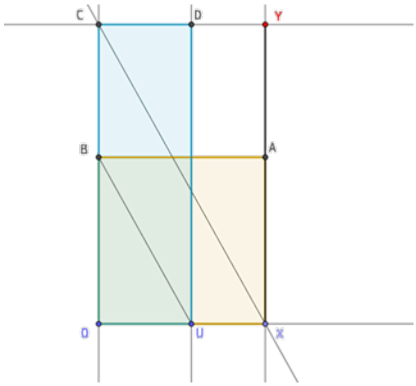
Figura 5

Uso del teorema di Talete per costruire un rettangolo equivalente a un quadrato



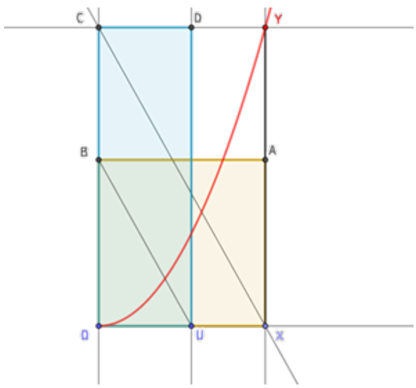
La scelta di U quindi ci ha permesso di rappresentare la variazione dell'estensione del quadrato su OX con un rettangolo che ha un segmento fisso e uno variabile. Abbiamo quindi concentrato la variazione del quadrato su OX in quella di un singolo segmento OU, che possiamo trasportare su XY, perpendicolare alla semiretta OU (Figura 6).

Figura 6
Trasporto di un lato di un rettangolo avente l'altro lato fisso perpendicolarmente a un segmento variabile



Il luogo di punti Y è quindi in grado di rappresentare la variazione del quadrato OX (Figura 7).

Figura 7
Luogo generato dagli estremi del segmento XY al variare dell'estremo X del segmento variabile OX



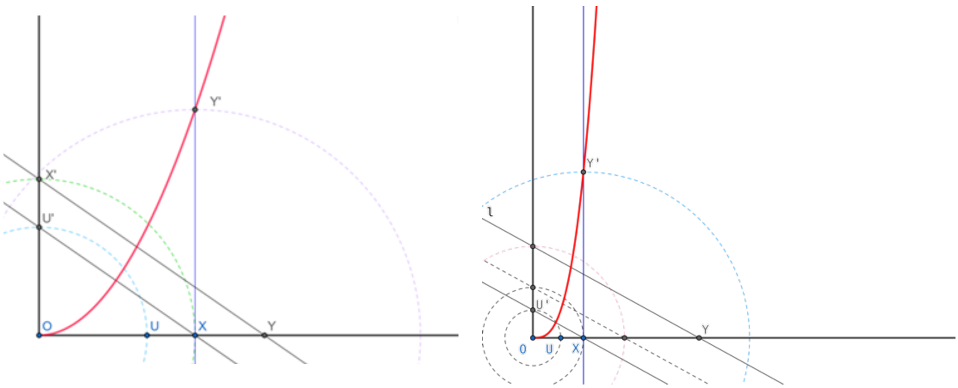
Nell'algebra di Cartesio, la proporzione $y: x = x: 1$ (dove $1 = OU$, $x = OX = OB$ e $y = OY = OY'$), che descrive il "sintomo" della curva luogo di punti Y si può esprimere con l'equazione $y = x^2$.

Iniziamo con la costruzione geometrica del quadrato di un segmento OX in cui O è fisso e X è libero di variare, e mostriamo come nell'algebra di Cartesio il quadrato di un segmento sia a sua volta un segmento. Introduciamo l'idea di come conviene procedere per visualizzare una covariazione tra segmenti variabili: partendo dalla semiretta di origine O, su cui viene fissato il segmento unità OU, si costruisce il segmento variabile OX. Dopodiché si trasporta il segmento OYcostruito a partire dal segmento OXsulla retta perpendicolare passante per X, in modo da "separare" le variazioni e così generare il luogo (curva) descritto dal punto Y'. Nell'algebra di Cartesio, il "sintomo" della curva luogo costruita con questa covariazione geometrica si può esprimere con la proporzione $y: x = x: 1$, (dove $1 = OU$, $x = OX$ e $y = OY = OY'$) da cui si ottiene l'equazione $y = x^2$. Grazie all'introduzione dell'unità, ogni rapporto e ogni prodotto si può rappresentare con un segmento. Le equazioni perdono l'omogeneità delle proporzioni ma sono più flessibili.

4.2. Il grafico della funzione cubo $y = x^3$

Nell'algebra di Cartesio possiamo rappresentare con un segmento anche il cubo di un segmento OX, senza bisogno di passare attraverso una costruzione tridimensionale del cubo. Moltiplicando il segmento $OY = x^2$ ottenuto nella costruzione precedente per il segmento x usando ancora il teorema di Talete, possiamo costruire il segmento $y = x^3$ il cui luogo, variando X e usando il linguaggio delle funzioni, descrive il grafico di $y = x^3$ (Figura 8).

Figura 8
A sinistra, la costruzione del segmento XY' che rappresenta OX^2 nell'algebra di Cartesio, viene condotta in maniera leggermente diversa da quella che abbiamo descritto nella sottosezione 4.1 che si presta più facilmente all'iterazione. Si riporta il segmento OU sul semiasse ortogonale, intersecando la circonferenza centrata in O e passante per U con il semiasse nel punto U'. Analogamente, si riporta il segmento OX su OX'. Per il teorema di Talete, la parallela per X' a XU' sega il semiasse OX in un punto Y tale che $OY = OX^2$. L'estremo Y' del segmento XY' congruente a OY sulla perpendicolare a OX per X nel semipiano contenente X' (che si può costruire con riga e compasso usando Euclide I.2) descrive il grafico di $y = x^2$.
A destra, per moltiplicare il segmento x^2 ottenuto al passo precedente e indicato in verde in figura basta riportare il suo estremo sul semiasse OU' con il compasso e tracciare la parallela a $U'X$ dal punto ottenuto. La sua intersezione Y con il semiasse OX determina il segmento $OY = OX^3$. L'estremo Y' del segmento XY' congruente a OY descrive il grafico di $y = x^3$.

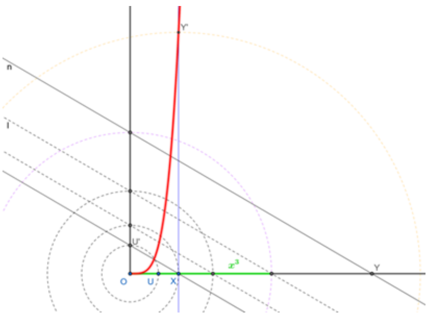


4.3. Il grafico della funzione ipercubo $y = x^4$

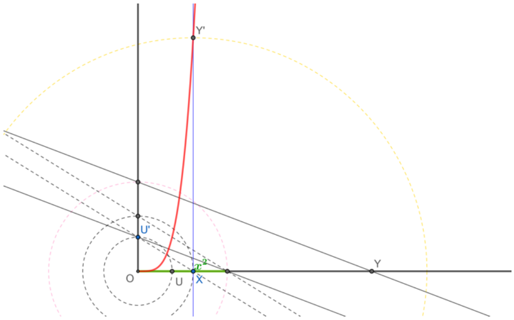
Nell'algebra di Cartesio possiamo costruire facilmente il grafico della funzione $y = x^4$, che geometricamente non è associata ad alcuna figura elementare nello stesso senso in cui il quadrato è associato a $y = x^2$ e il cubo a $y = x^3$. Il segmento x^4 si può ottenere sia moltiplicando x^3 per x, sia moltiplicando x^2 per x^2 (Figura 9).

Figura 9

Costruzione del segmento $y = x \cdot x^3$



Costruzione del segmento $y = x^2 \cdot x^2$



4.4. Il grafico di una funzione polinomiale:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

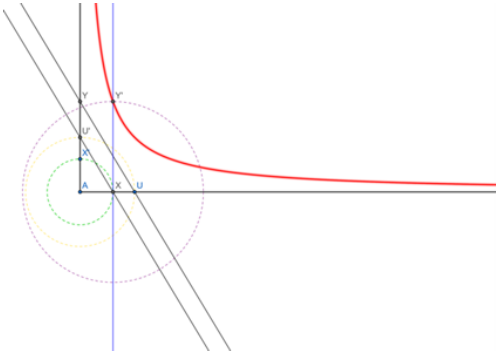
Dopo aver mostrato la procedura per costruire le potenze di un segmento x, dovrebbe essere chiaro come sia possibile costruire con riga e compasso i segmenti che, rispetto all'unità di misura fissata rappresentano, nell'algebra di Cartesio, il segmento $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$. Anche i coefficienti a_i della combinazione sono rappresentati nell'algebra di Cartesio da segmenti, che si possono disegnare in un software di geometria dinamica in modo tale da poter interpretare geometricamente la dipendenza dai parametri del grafico della funzione polinomiale semplicemente trascinando gli estremi di questi segmenti.

4.5. Il grafico della funzione reciproco $y = \frac{1}{x}$

Anche la costruzione $y = \frac{1}{x}$, e quindi il grafico della funzione $y = \frac{1}{x}$, può essere realizzato molto facilmente con l'algebra di Cartesio (Figura 10).

Figura 10

Costruzione del segmento $y = \frac{1}{x} = XY'$ *a partire dal segmento* $x = AX$*, utilizzando il teorema di Talete*

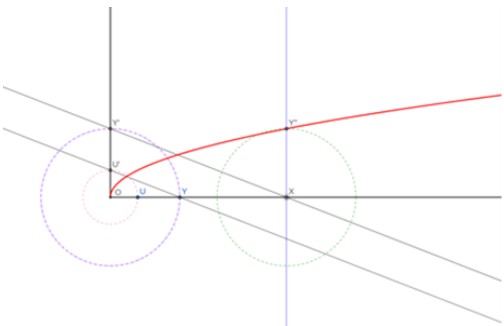


4.6. Il grafico della funzione radice quadrata $y = \sqrt{x}$

Come ricordato nel paragrafo 3, Cartesio insegna anche a costruire con riga e compasso la radice quadrata di un segmento x e quindi il grafico della funzione $y = \sqrt{x}$ (Figura 11).

Figura 11

Costruzione del segmento $y = \sqrt{x} = XY''$ *a partire dal segmento* $x = OY$



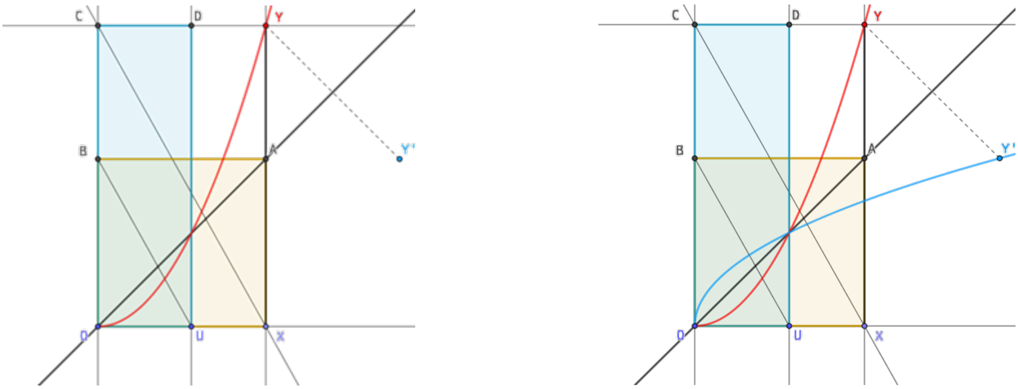
5. Osservazioni conclusive

Combinando quanto visto finora non è difficile immaginare come costruire con riga e compasso la curva luogo corrispondente al grafico di una funzione del tipo $y = f(x)$ e di $y = f(\sqrt{x})$ dove f è una funzione razionale. È bene tenere a mente che i luoghi che abbiamo costruito non sono costruzioni con riga e compasso. Una costruzione con riga e compasso produce un punto del luogo ma la variazione continua di questo punto, che ci viene mostrata da un software di Geometria, cioè l'intera curva, non lo è.[5]

Con la funzione luogo di GeoGebra si può disegnare anche il grafico della funzione inversa di una funzione di cui si è già costruito il luogo. Si consideri un punto Y sul grafico di una funzione $y = f(x)$ e se ne costruisca il simmetrico, con riga e compasso, rispetto alla bisettrice dei due semiassi. Il luogo di questi punti disegna il grafico della funzione inversa (Figura 12).

Figura 12

Il luogo dei punti simmetrici rispetto alla bisettrice dei due semiassi dei punti del grafico di $y = f(x)$ *è il grafico della funzione* $y = f^{-1}(x)$



Si noti però che questa costruzione non realizza una costruzione con riga e compasso di un segmento $z = f^{-1}(y)$ a partire da un segmento y ma solo a partire da un segmento $y = f(x)$. La costruzione di $f(y)$ dato y non è in generale possibile con riga e compasso. Per esempio, è possibile costruire, con riga e compasso, un numero finito qualsiasi di punti del grafico della radice cubica ma non la radice cubica di un segmento.

Quanto detto mette in evidenza un aspetto del grafico di una funzione come oggetto matematico su cui è possibile operare con costruzioni di livello superiore rispetto a quelle che ci hanno permesso di "costruire i punti del grafico di una funzione": un passaggio fondamentale della "reificazione" (Sfard, 1992) di un concetto. Per finire, osserviamo come abbiamo sempre limitato la costruzione del grafico al quadrante compreso tra due semiassi ortogonali aventi un estremo comune. L'algebra di Cartesio è un'algebra di segmenti, non di segmenti orientati, ed esclude quindi la trattazione geometrica diretta di quantità negative. Su questo aspetto contiamo di tornare

---

[5] Le sole curve costruibili con riga e compasso sono unioni finite di archi di circonferenze e di segmenti.

in un successivo lavoro.

Le attività proposte non sono state testate in classi di scuola superiore. Abbiamo svolto però diverse attività con insegnanti in servizio e futuri insegnanti.

Nell'a.a. 2021-22 in uno dei progetti proposti agli studenti del corso di Istituzioni di Matematiche Complementari della laurea Magistrale in Matematica della Sapienza abbiamo chiesto di preparare schede didattiche per un percorso da svolgere in una classe seconda per introdurre i ragazzi alla nozione di covariazione di quantità variabili con l'algebra di Cartesio. I lavori sono stati discussi durante le prove orali.

Tenendo presente le risultanze e le difficoltà incontrate dagli studenti, abbiamo progettato un laboratorio che è stato proposto a 14 insegnanti in servizio durante il convegno CIIM 2022 di L'Aquila. Le schede del laboratorio sono disponibili su https://www.geogebra.org/classroom/qmsvwtqe.

Il laboratorio è durato due ore a cui sono seguiti 30 minuti di discussione. Abbiamo utilizzato lo strumento GeoGebra Classroom (https://www.geogebra.org/m/hncrgruu).

Al termine dell'attività è stato consegnato ai partecipanti un questionario dal quale è emerso:

- sorpresa nel constatare come sia possibile esprimere la nozione di covariazione e di continuità di una covariazione in maniera quantitativa senza utilizzare i numeri;
- sorpresa nel constatare che i grafici delle funzioni razionali siano ottenibili "trascinando" una costruzione realizzata con riga e compasso;
- interesse a sperimentare a scuola questo percorso progettando schede più diluite e dettagliate;
- difficoltà nel comprendere immediatamente il senso della proposta ma anche interesse nel riconoscere la possibilità di poter affrontare alcuni nodi complessi dell'insegnamento della matematica in modo rigoroso e quantitativo evitando le complessità relative all'introduzione dei numeri reali e delle relative operazioni.

Indipendentemente da un'eventuale (e secondo noi auspicabile) trasposizione in classe, le sperimentazioni fatte ci convincono quindi dell'utilità di presentare questo approccio nella formazione degli insegnanti e dei futuri insegnanti. Con esso è possibile mettere in luce alcune difficoltà relative all'uso dei numeri per rappresentare quantitativamente nozioni intuitive quali movimento e continuità. Queste difficoltà sono, a nostro avviso, trascurate nell'insegnamento in quanto non vengono presentate alternative alla trattazione numerica della covariazione se non da un punto di vista qualitativo. La proposta avanzata in questo lavoro, di combinare l'algebra dei segmenti di Cartesio con l'impiego di un software di Geometria Dinamica, è una possibile alternativa completamente rigorosa.

Riferimenti bibliografici

Antonini, S., Baccaglini-Frank, A., & Lisarelli, G. (2020). From experiences in a dynamic environment to written narratives on functions. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *6,* 1–29.

Blåsjö, V. (2021). Operationalism: An interpretation of the philosophy of ancient Greek geometry. *Foundation of Science, 27*, 587–708.

Bos, H. (2001). *Redefining geometrical exactness.* New York: Springer.

Brigaglia, A., Raspanti, M. A., & Rogora, E. (2021). L'uso di un software di geometria dinamica nella formazione dei futuri insegnanti. *Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana*, *6*(1), 37–67.

Carlson, M. P., & Oerthman, M. (2005). *Research Sampler 9: Key aspects of knowing and learning the concept of function*. https://www.maa.org/programs/faculty-and-departments/curriculum-department-guidelines-recommendations/teaching-and-learning/9-key-aspects-of-knowing-and-learning-the-concept-of-function

Colacicco, G., Lisarelli, G., & Antonini, S. (2017). Funzioni e grafici in ambienti digitali dinamici. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula.* 2, 7–25.

Descartes, R. (1637). *Discours de la Méthode. Pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences. Plus La Dioptrique, Les Météores et la Géométrie.* Leyde: Ian Maire.

Dubinsky, E., & Harel, G. (1992). The nature of the process conception of function. In E. Dubinsky & Harel, G. (Eds), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 85–106). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Falcade, R., Laborde, C., & Mariotti, M. A. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics, 66*, 317–333.

Heiberg, J. L. (1891). *Apollonii Pergaei quae Graece exstant cum commentariis antiqua.* Leipzg: Teubner.

Hoenwarter, M. (2002). *GeoGebra: Ein Softwaresystem für dynamische Geometrie und Algebra der Ebene* (Thesis). Salzburg: Universität Salzburg.

Niss, M. (2020). Functions learning and teaching. In S. Lerman, (Ed), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 303–306). New York: Springer.

Rogora, E. (2016). *Cartesio*. Milano: Edizioni Corriere della Sera.

Serfati, M. (2005). René Descartes *Geometria* (1649). In I. Grattan–Guinness (Ed.), *Landmark writings in Western Mathematics (1640–1940)* (pp. 1–22). Amsterdam: Elsevier.

Sfard, A. (1992). Operational origin of mathematical objects and the quandary of reification – the case of functions. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 59–84). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 25–58). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151–169.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *14*(3), 293–305.

Youschkevitch, A. P. (1976). The concept of function up to the middle of 19th century. *Archive for History of Exact Sciences*, *16*(1), 37–85.